

安定性の理論的研究〔2〕

——直進走行時の自転車の周波数応答関数——

<自転車の安全性，操縦性の研究>

明治大学工学部 大矢 多喜雄

自振協技術研究所 服部 四士主

は し が き

第1報¹⁾では、人間—自転車系の直進時における制御回路について基礎的な考察を試み、直進走行時のハンドル角、車体傾き角、ハンドルトルクの測定方法、これらの定常確率過程実測値からの統計量の算出方法およびその計算結果についての図示および考察を行った。

本報告はとくにハンドル角—車体傾き角に関する周波数応答関数を採り上げ、自転車の簡単な力学的模型による周波数応答関数と実測値の比較について報告する。

1 実験方法と結果

実験装置は前報と同じであるが、実験条件は次のとおりである。

走行方法：(1) ペダリング走行

(2) けん引走行

(3) 手放し走行

運転者：O および K (大学4年次生)

車速：5, 10, 15km/h の3種類

これらの条件で長さ900mの直進路を往復し、データレコーダに採取し、A—D変換器にかけるのであるが、今回は時間の制約から約300mのデータについて統計処理を行った。

車体傾き角 α についてのパワースペクトル G_α を図1～3に示す。図1はペダリング走行、車速5, 10, 15km/hで、(a)は操縦者O、(b)はKによるものである。パワースペクトルは角度の2乗を示しているので、車体傾き角 α は最大値が 2° 内外で、0.2～0.4Hzにピークがあり、車速あるいは操縦者による影響が大きいことがわかる。なお、ペダリング走行の場合、車速15km/hのときのペダル回転数は約0.9Hzである。図1(a)、(b)の車速

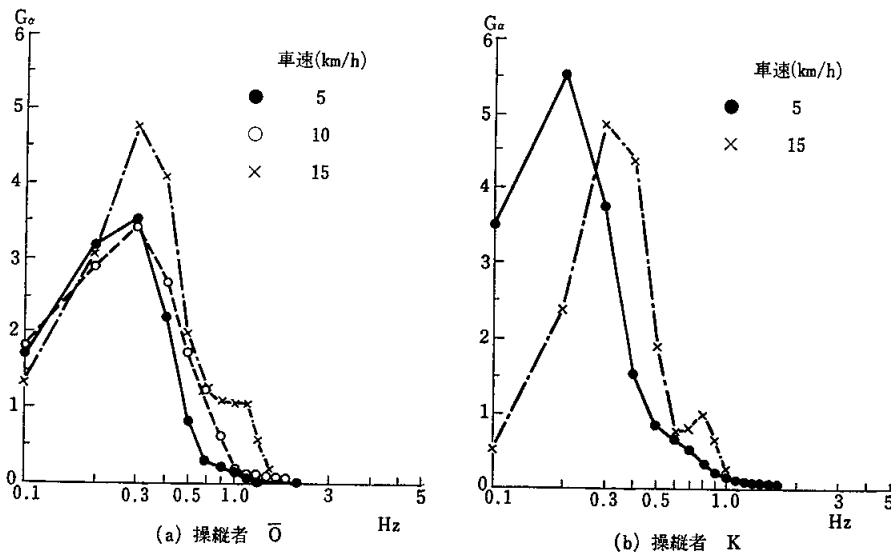


図1 車体傾き角のパワースペクトル (ペダリング走行)

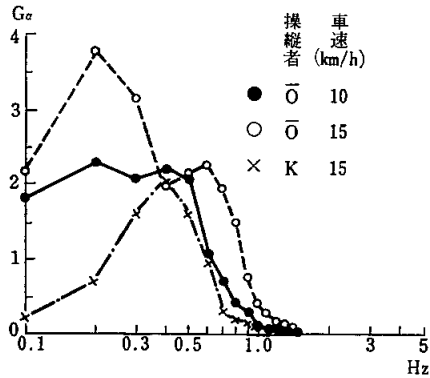


図2 車体傾き角のパワースペクトル (けん引走行)

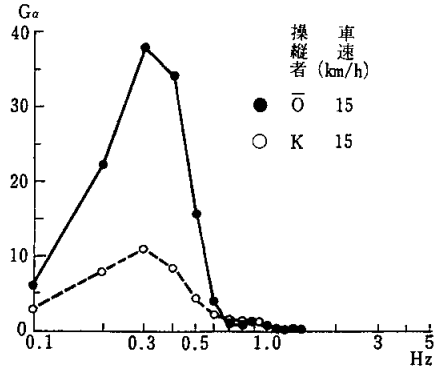
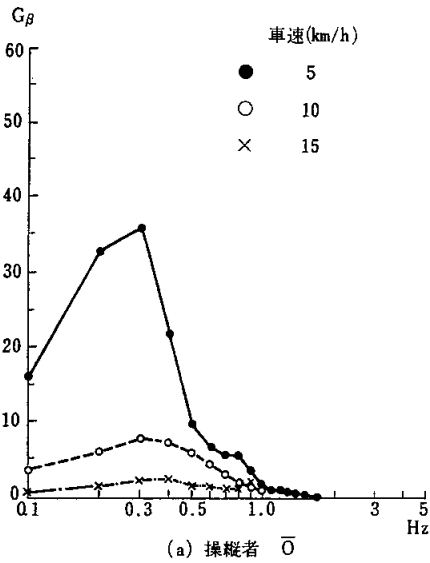
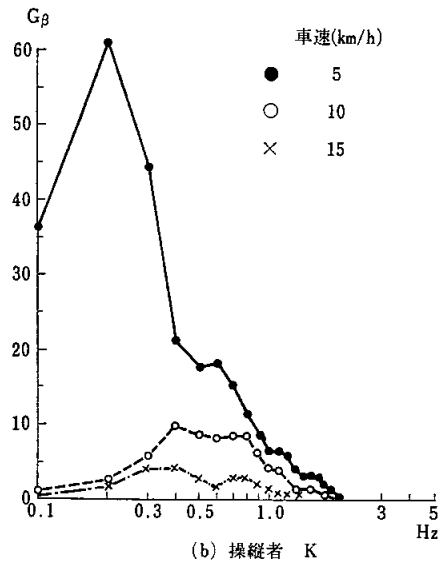


図3 車体傾き角のパワースペクトル (手放し走行)



(a) 操縦者 \bar{O}



(b) 操縦者 K

図4 ハンドル角のパワースペクトル (ペダリング走行)

15km/hのときの0.9Hz付近の小さなピークは、これを示すものと思われる。

図2はけん引走行のパワースペクトルである。車体傾き角はペダリング走行に比べてやや振幅は小さくなるが、個人差が大きいことが一見してわかる。ペダルの回転数の影響によるはずの小ピークは見られないのは当然である。図3は手放し走行のときのもので、操縦者 \bar{O} はKに比べて振幅が大きい。

図4～6はハンドル角 β に関するパワースペクトル G_β である。図4はペダリング走行のもので、(a)は操縦者 \bar{O} 、(b)はKによるものである。ハンドル角は速度が低下すると大きくなり、5km/hでは6～8°にも達し、また、優勢な周波数の範囲も0.2～0.8Hzと車体傾き角よりも高周波側に移っている。また、傾き角と同様に個

人差も大きい。

図5はけん引走行の場合である。ペダリング走行のときは車速が大きくなるとハンドル角は急速に小さくなったのに、けん引走行の場合は車速が大きくなってもあまりハンドル角は小さくならない傾向がある。図6は手放し走行の場合であるが、図3の車体傾き角のときと同様に、ハンドル角においても操縦者Kの方が振幅が大きく、個人差を示すものと思う。また、手放し走行では0.8～0.9Hzの小さなピークが見られるが、これはペダル回転と関係があると思われる。

次にハンドル角 β —車体傾き角 α に関する相互スペクトル密度関数(クロススペクトル)について示そう。図7はペダリング走行の場合のクロススペクトルで、(a)は操縦者 \bar{O} 、(b)はKによるものである。いずれも縦軸

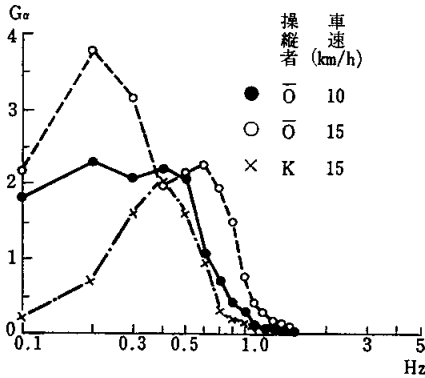


図2 車体傾き角のパワースペクトル (けん引走行)

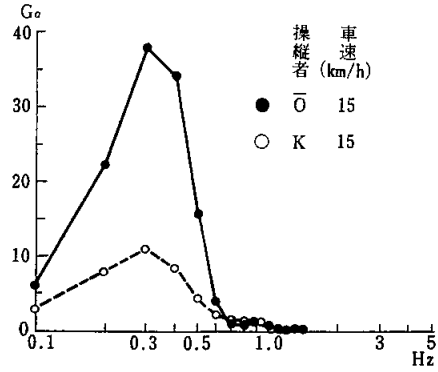
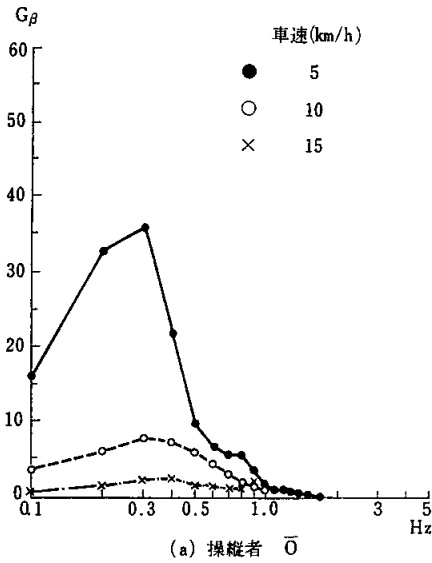
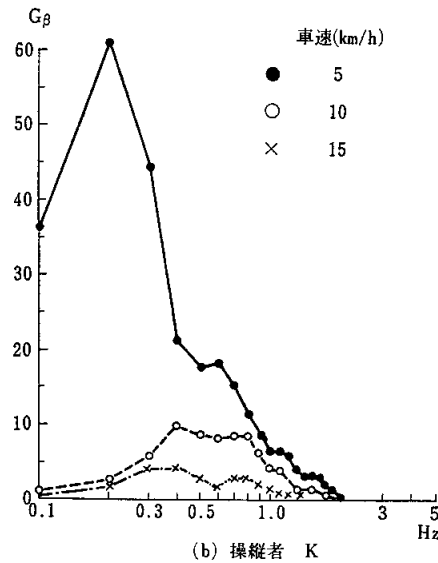


図3 車体傾き角のパワースペクトル (手放し走行)



(a) 操縦者 \bar{O}



(b) 操縦者 K

図4 ハンドル角のパワースペクトル (ペダリング走行)

15km/hのときの0.9Hz付近の小さなピークは、これを示すものと思われる。

図2はけん引走行のパワースペクトルである。車体傾き角はペダリング走行に比べてやや振幅は小さくなるが、個人差が大きいことが一見してわかる。ペダルの回転数の影響によるはずの小ピークは見られないのは当然である。図3は手放し走行のときのもので、操縦者 \bar{O} はKに比べて振幅が大きい。

図4～6はハンドル角 β に関するパワースペクトル G_β である。図4はペダリング走行のもので、(a)は操縦者 \bar{O} 、(b)はKによるものである。ハンドル角は速度が低下すると大きくなり、5km/hでは6～8°にも達し、また、優勢な周波数の範囲も0.2～0.8Hzと車体傾き角よりも高周波側に移っている。また、傾き角と同様に個

人差も大きい。

図5はけん引走行の場合である。ペダリング走行のときは車速が大きくなるとハンドル角は急速に小さくなったのに、けん引走行の場合は車速が大きくなってあまりハンドル角は小さくならない傾向がある。図6は手放し走行の場合であるが、図3の車体傾き角のときと同様に、ハンドル角においても操縦者Kの方が振幅が大きく、個人差を示すものと思う。また、手放し走行では0.8～0.9Hzの小さなピークが見られるが、これはペダル回転と関係があると思われる。

次にハンドル角 β —車体傾き角 α に関する相互スペクトル密度関数(クロススペクトル)について示そう。図7はペダリング走行の場合のクロススペクトルで、(a)は操縦者 \bar{O} 、(b)はKによるものである。いずれも縦軸

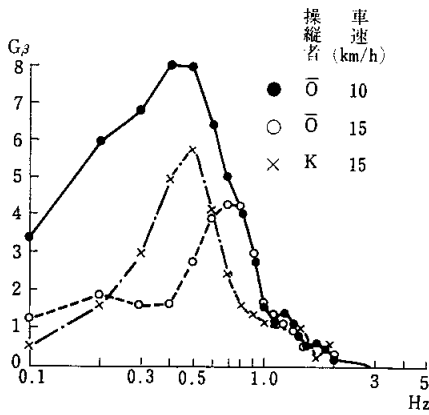


図5 ハンドル角のパワースペクトル (けん引走行)

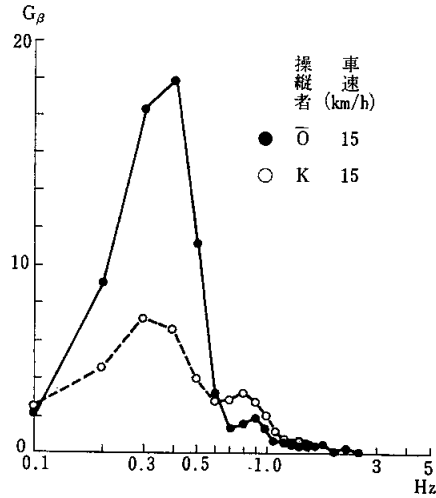
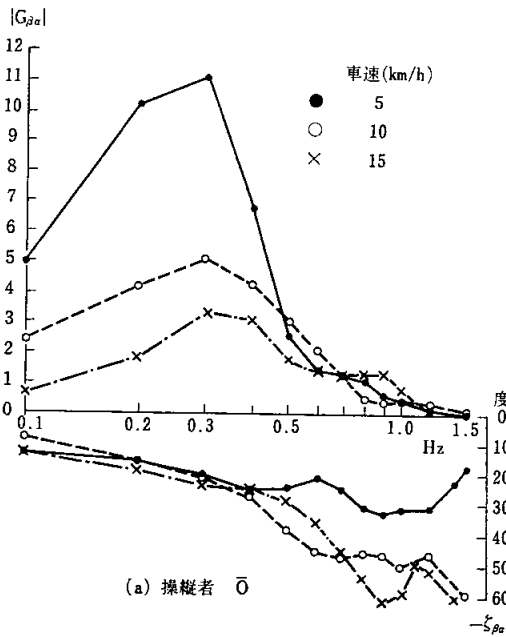
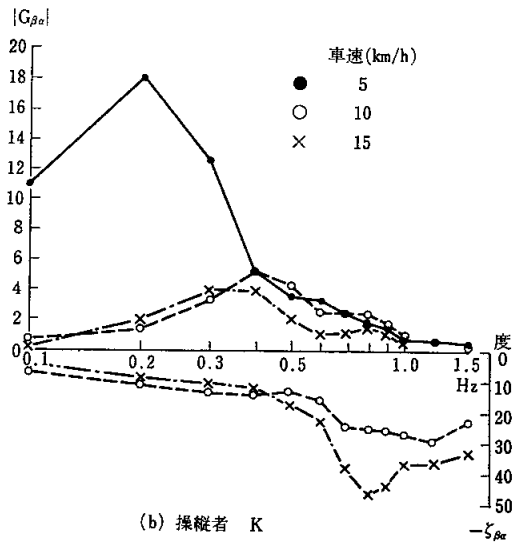


図6 ハンドル角のパワースペクトル (手放し走行)



(a) 操縦者 O



(b) 操縦者 K

図7 ハンドル角—車体傾き角のクロススペクトル (ペダリング走行)

$|G_{\beta\alpha}|$ は振幅、 $\zeta_{\beta\alpha}$ は位相角を示す。振幅は0.2~0.4 Hzの低周波が優勢であり、とくにこの傾向は車速が低い場合に著しい。 $\zeta_{\beta\alpha}$ は位相遅れであり、負号であるからハンドル角 β は車体傾き角 α に遅れて動いていることがわかる。0.1秒の遅れは振動数0.2Hzのときは7.5°、0.4Hzのときは15°に相当する(図9参照)から、ハンドル角は車体傾き角に対して約0.2秒遅れていることになる。図8はけん引走行、図9は手放し走行のクロススペクトルである。図9の手放し走行の位相角は比較的に円滑な曲線を示しているのが特徴的である。図中に0.11

秒の位相遅れに相当する位相角を点線で示してあるが、これとの比較からわかるように、手放し走行の位相遅れは大略0.1秒と一定となっている。

次に自転車—人間系の制御回路において、かりにハンドル角 β を入力とし、車体傾き角 α を出力としたときの周波数応答関数の実測値を示す。図10は車速5 km/hの場合である。ハンドル角振幅 β_0 を入力、車体傾き角振幅 α_0 を出力としたときの $20\log \alpha_0/\beta_0$ ($|H_i|$: ゲイン要素, 単位 dB)を縦軸に示したもので、 $\alpha_0/\beta_0 > 1$ すなわち増幅したときは正となる。6dBは $\alpha_0/\beta_0 = 2$ 、-6dB

は $\alpha_0/\beta_0 \approx 0.5$ である。図10から周波数が高くなると、ハンドル角に比較して車体傾き角が非常に小さくなるのがわかる。図11は車速10km/hの場合で、車体傾き角が5km/hのときより大きくなっている。図12(a)は操縦者 \bar{O} による車速15km/hの場合で、周波数が低い範囲では

ゲイン要素はプラスとなっている。また、ペダリング走行、けん引走行、手放し走行の三者の比較は、周波数が高いと相違が出てくるが、周波数が0.5Hz以下ではほとんど一致している。図12(b)は操縦者Kによるもので、 \bar{O} の場合とほぼ同じ傾向を示しているが、一般にゲイン要素が小さくなっているのは個人差を示すものであろう。

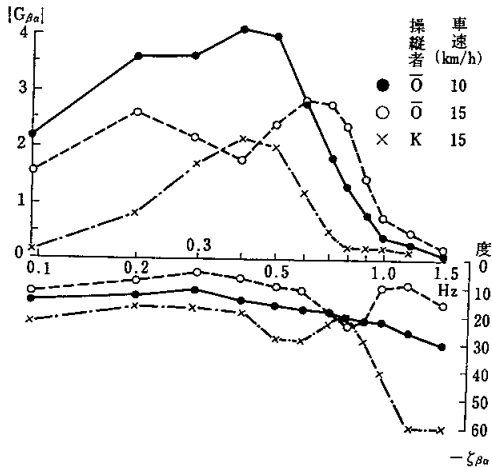


図8 ハンドル角—車体傾き角のクロススペクトル (けん引走行)

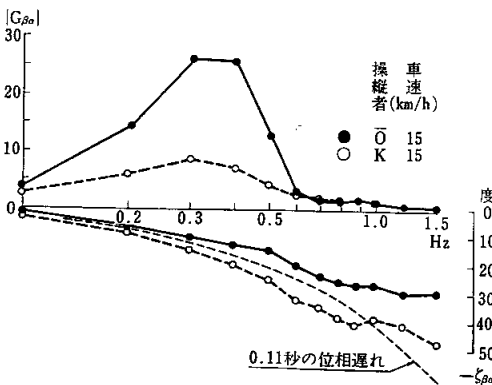
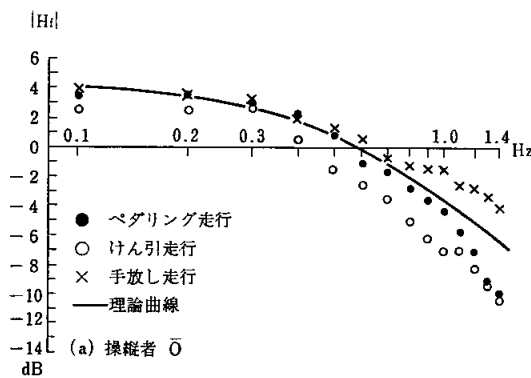
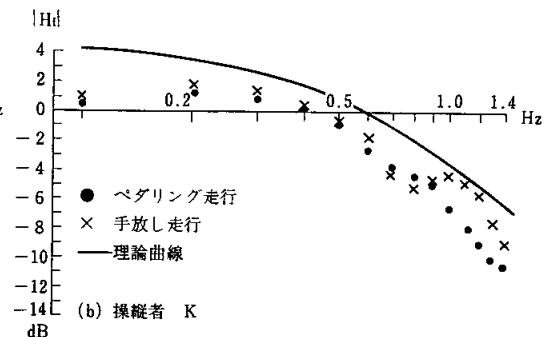


図9 ハンドル角—車体傾き角のクロススペクトル (手放し走行)



(a) 操縦者 \bar{O}



(b) 操縦者 K

図12 ハンドル角—車体傾き角の周波数応答関数 (車速 15km/h)

2 自転車の周波数応答関数

自転車がハンドル角 β によって車体傾き角 α にどのような変化を生ずるのか、次のような仮定のもとに求めてみる。

仮定

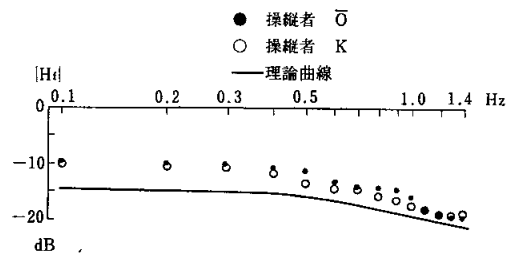


図10 ハンドル角—車体傾き角の周波数応答関数 (車速 5km/h)

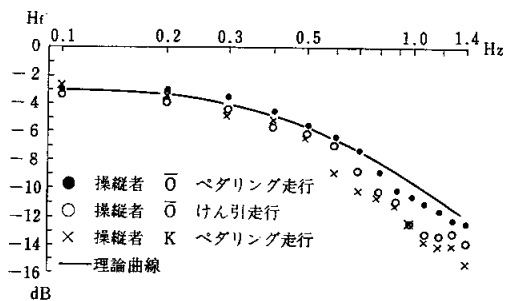


図11 ハンドル角—車体傾き角の周波数応答関数 (車速 10km/h)

- (1) 車輪の横滑り角は零で、車輪の軌跡は車輪の向きと一致する。すなわち、コーナリングパワーは無限大であり、また、キャンバスタストは無視する。
- (2) 人車一体である。
- (3) トレール = 0, キャスタ角 = 90°, すなわち、ハンドル軸は垂直で、ハンドル軸線上に前輪軸がある。

使用記号

- X: 全車 (人間と自転車を一体としたもの) の重心を通る前後軸 (前向きに正)
 - Y: 全車の重心を通る左右軸 (右向きに正)
 - Z: 全車の重心を通る上下軸 (下向きに正)
 - α : 車体の傾き角 (右に正) rad.
 - β : ハンドル角 (右に正) rad.
 - ϕ : 車体の向き (右に正) rad.
 - y: 進路からのずれ (右に正) m
 - l_1, l_2 : 重心と前後輪接地点との前後距離 m
 - l: 前後輪の接地点間距離 m, $l = l_1 + l_2$
 - W: 全体重量 kg
 - J_x : 重心を通る前後軸 X まわりの全車の慣性モーメント $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$
 - J_w : 車輪の車軸まわりの慣性モーメント $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$
 - J_{xz} : 全車の X, Y 軸に関する慣性乗積 $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$
 - h: 全車の重心高さ m
 - r: 車輪半径 m
 - v: 車速 m/s
 - g: 重力加速度 m/s^2
- いま、図13のように、

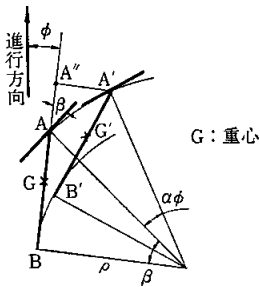


図 13 dt 秒間における車体の変位

時刻 t のとき、前輪 A 点、後輪 B 点
 時刻 t + dt のとき、前輪 A' 点、後輪 B' 点
 とすると、車体の回転中心は前後輪にそれぞれ直角方向にあり、

$$\rho\beta = l \quad (\rho: \text{回転半径})$$

であるから、

$$\rho = l/\beta \dots\dots\dots(1)$$

また、 $AA' = v \cdot dt$ および $AA' = \rho \cdot d\phi$ であるから、

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{v}{\rho} \dots\dots\dots(2)$$

したがって、式(1), (2)から、

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{v}{l} \cdot \beta \dots\dots\dots(3)$$

車体傾き角 $\alpha = 0$ のときの重心点の横方向変位速度を $(\dot{y})_0$ とすると、図13において、

$$A'A'' = AA' \cdot \beta = v\beta \cdot dt$$

したがって、重心点の横方向速度は、

$$(\dot{y})_0 = v\phi + v \frac{l_2}{l} \beta$$

車体傾き角 α があるときはこれに $h\dot{\alpha}$ が加わり、

$$\dot{y} = v\phi + v \frac{l_2}{l} \beta + h\dot{\alpha} \dots\dots\dots(4)$$

車体が図14のように傾いているときに、接地点に生じている水平力を F とすると、

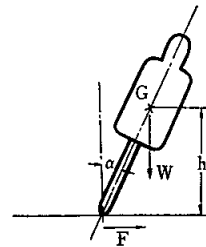


図 14 車体傾き時の外力

$$\frac{W}{g} \ddot{y} = F$$

重心 G を通る前後軸 X まわりの運動方程式は、

$$J_x \ddot{\alpha} = -Fh + Wh\alpha + J_{xz} \ddot{\phi} - J_w \frac{v}{r} (2\dot{\phi} + \dot{\beta})$$

右辺の第 4 項はジャイロ作用により車体を立ち直らせようとするトルクである。前式と合わせて F を消去すると、

$$J_x \ddot{\alpha} = -\frac{W}{g} h \ddot{y} + Wh\alpha + J_{xz} \ddot{\phi} - J_w \frac{v}{r} (2\dot{\phi} + \dot{\beta}) \dots\dots(5)$$

式(3), (4), (5)から y, ϕ を消去すると、

$$\begin{aligned} & (J_x + \frac{W}{g} h^2) \ddot{\alpha} - Wh\alpha \\ &= -v \left(\frac{W}{g} h \frac{l_2}{l} - \frac{J_{xz}}{l} + \frac{J_w}{r} \right) \dot{\beta} \\ & \quad - \frac{v^2}{l} \left(\frac{W}{g} h + 2 \frac{J_w}{r} \right) \beta \dots\dots\dots(6) \end{aligned}$$

各係数を a_1, \dots, a_4 とすると、式(6)は、

$$a_1 \ddot{\alpha} - a_2 \alpha = -a_3 \dot{\beta} - a_4 \beta \dots\dots\dots(6')$$

上式をラプラス変換する。

$$L\{\alpha(t)\} = A(s)$$

$$L\{\beta(t)\} = B(s)$$

とすると、

$$a_1s^2A(s) - a_2A(s) = -a_3sB(s) - a_4B(s)$$

$$(a_1s^2 - a_2)A(s) = -(a_3s + a_4)B(s)$$

したがって、自転車の伝達関数 $H_b(s)$ は、

$$H_b(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{-(a_3s + a_4)}{a_1s^2 - a_2}$$

周波数応答関数を $H_b(f)$ とすると、

$$H_b(f) = \frac{2\pi a_3 f + a_4}{4\pi^2 a_1 f^2 + a_2}$$

となり、ゲイン要素については、

$$|H_b(f)| = \sqrt{\left(\frac{a_4}{4\pi^2 a_1 f^2 + a_2}\right)^2 + \left(\frac{2\pi a_3 f}{4\pi^2 a_1 f^2 + a_2}\right)^2}$$

$$= \frac{a_4}{4\pi^2 a_1 f^2 + a_2} \sqrt{1 + 4\pi^2 \left(\frac{a_3}{a_4}\right)^2 f^2}$$

位相要素 $\zeta_b(f)$ については、

$$\zeta_b(f) = \tan^{-1} \frac{2\pi a_3 f}{a_4}$$

が得られる。式(7)が入力ハンドル角 α 、出力を車体傾き角 β としたときの自転車の周波数応答関数である。

これに実験に用いた自転車の諸元を入れてみよう。

$$W = 86.1 \text{ kg}, J_x = 0.454 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^2, J_{x_2} = 0,$$

$$J_w = 0.0218 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^2, l_1 = 0.596 \text{ m}, l_2 = 0.514 \text{ m},$$

$$l = 1.10 \text{ m}, h = 0.84 \text{ m}, r = 0.325 \text{ m}$$

したがって、

$$a_1 = J_x + \frac{W}{g} h^2 = 6.68 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^2$$

$$a_2 = Wh = 72.3 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$a_3 = v \left(\frac{W}{g} h \frac{l_2}{l} - \frac{J_{x_2}}{l} + \frac{J_w}{r} \right) = 3.49v \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$$

$$a_4 = \frac{v^2}{l} \left(\frac{Wh}{g} + 2 \frac{J_w}{r} \right) = 6.79v^2 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

これを式(7)のゲイン要素に代入し、各車速ごとに示したのが図10(5 km/h)、図11(10 km/h)、図12(15 km/h)の実線である。図10~12の実測点はフィードバックが行われている実際の走行中のハンドル角—車体傾き角の周波数応答関数であるにもかかわらず、図11、図12(a)、とくに 0.5 Hz 以下では式(7)の曲線とよく一致している。このことについてはさらに検討をすすめる必要がある。式(7)の位相要素 $\zeta_b(f)$ についてはゲイン要素とともに図15に示す。単位ハンドル角に対し、車体傾き角は車速とともに増大するが、周波数に対してはゲインが急速に低下することがわかる。位相要素は正値であるが、これはハンドル角、車体傾き角とも右方向を正としているためであって、右方向のハンドル角に対して車体傾き角は位相角がだけ遅れて左方向に傾くことになる。そして、この位相遅れは車速が増大すると小さくなり、周波数が高くなると大きくなり、最大 90° に達する。なお、

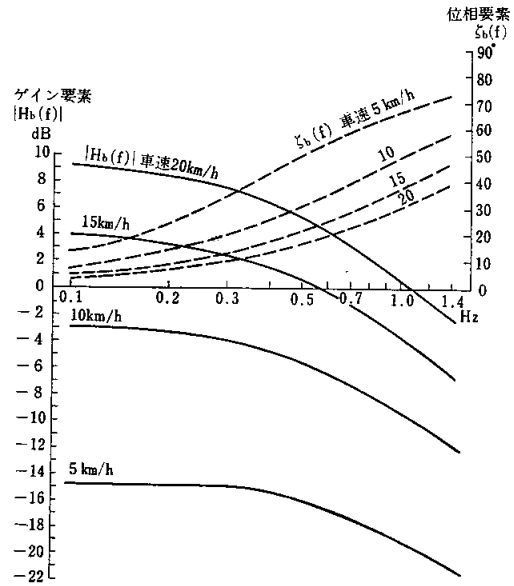


図 15 自転車におけるハンドル角—車体傾き角の周波数応答関数

この $\zeta_b(f)$ はクロススペクトルの位相遅れ $\zeta_{\beta\alpha}$ (図7~9) とは符号が反対となっているが、これは定義と関連することであって、いずれもこの角度の絶対値だけハンドル角 β が車体傾き角 α より遅れていることになる。

む す び

車体傾き角 α とハンドル角 β について、パワースペクトル、クロススペクトル、周波数応答関数を実走実験から求め、また、簡単な直立安定走行理論計算によって、自転車の周波数応答関数を求めて比較した。その結果、周波数応答関数は実験値と理論値がほぼ近似的な一致をみて、安定走行の特性を知ることができた。しかし、実験値は人間の制御が行われている実走行のものであり、理論値は自転車単体のものであるから、この両者がほぼ一致するということは、さらに別の情報がかくされていることになり、今後解明をする必要がある。

なお、これらの研究における実走行実験およびコンピュータ計算の多くは、昭和51年度4年次生、田口正樹、池沢秀樹、金子高志、昭和52年度4年次生、柿本富生、大薗健文の諸君によって行われたものである。

文献

- 1) 大矢ほか 安定性の理論的研究 [I], 自振協技術研究所報告 No.9, 自振協技術研究所, 1978.