

自転車の安定走行 の力学



自転車の安定性（手放し走行）実験状況

大矢 多喜雄

1 自転車を直立させる ための二つの方法

自転車は前後二つの車輪によって走行するのであるから、不安定のように見えるが、初心者でも最初に多少の努力を払ってその「こつ」のみ込みさえすれば、きわめて気楽に操縦ができるものである。

自転車が倒れずに安定走行ができる理由として、昔から車輪のジャイロ効果がよくあげられており、また、最近出版された幾つかの自転車に関する通俗書の中にも、ジャイロ効果によって自転車が安定走行できると述べているのがある。しかしこれはむしろ間違いであって、ジャイロ効果が直接に車体の直立に役立つものではないことは、後で述べるとおりである。

自転車は操縦がきわめて容易であるといってもその内容は複雑である。自転車が倒れないで走れる理由はなんであろうか。それは、例えば自転車が右に倒れそうになったらハンドルを右に切ることによって、車輪の接地点を急速に右に移動させて重心を常に前後輪接地線の真上にあるようにさせる（注）筆者は工学博士、明治大学工学部教授

せているのが基本原理なのである。

自転車は直進走行という単純な走行状態においても、しさいに見れば絶えず左右にふらついていて、右に倒れそうになったら無意識的にハンドルを右に切り、車輪の接地点を急速に右に移動させることにより、車体を立て直しているのである。自転車は走っていないと倒れてしまう理由はここにある。

このハンドル操作は、搭（とう）乗者の手によって行われることがほとんどであるが、自転車の自然的なハンドル回転力による操作もあり得るのである。試みに、ハンドルを自由な状態にしておいて、自転車の後ろの荷台をつかんで自転車を押し走らせたとき、右に傾ければハンドルは自然に右に切れる。このように車体を傾けるだけでもハンドル操作ができるのであって、これが手放し走行が可能となる理由の一つである。この場合、ハンドルが車体の傾き方向に切れる理由は三つある。

その一つは、図1のように前輪接地点がハンドル軸より後ろにある（トレールがあるという）ために、例えば、車体が右に傾いたときに前輪接地荷重によってハンドルが右に回されるということ、第二には、前車輪を含めたハンドル系の重心

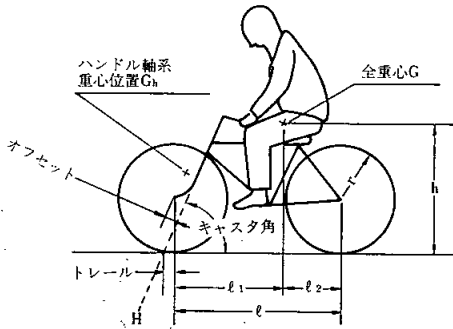


図1 自転車側面図

G_h がハンドル軸Hよりも前方にあるため、車体が右に傾くとハンドル系の重さによって、ハンドルが自然に右に切れるということである。トレールが大きく、また前輪接地荷重が大きいと、第一の理由によるハンドルの自然回転力が大となり、図1のオフセットが大きかったり、ハンドル系重量が大きかったりすると、第二の理由によるハンドル自然回転力が大となる。

ハンドルの自然回転力にはもう一つある。それはジャイロ効果によるものである。回転している前輪が右に傾けさせられると、ハンドルには右に切れるような回転力が生ずる。これをプレセッションと呼んでいる。したがって、これがハンドルの自然回転力の起こる第三の理由である。

普通車を例にとって⁽¹⁾、ある条件でのこの自然回転力の大きさの比較をしてみると、次のようであった。第一の前輪接地反力によるものを M_1 、第二のハンドル系の重量によるものを M_2 、プレセッションによるものを M_3 とすると、

車速 10km/h では、

$$M_1 = 0.1 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$M_2 = 0.02 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$M_3 = 0.03 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

車速が非常に小さいと、 M_1 、 M_2 は変わらないが M_3 は零となる。一方、車速を大きくしたり、車体の傾く速さを無理に大きくしたりすると、プレセッション作用は大きくなる。したがって、ハンドルの自然回転力はあまり大きくはないが、おおよそのところ、前輪の接地荷重によるものがその中でも大きいといえよう。

このように人為的あるいは自然的なハンドル操作による接地点の左右への移動が直立走行の第一の原理である。

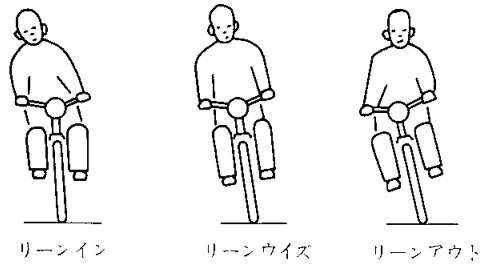


図2 旋回時の姿勢

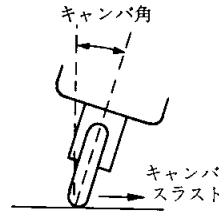


図3 キャンバスラストによる一輪車の操縦

自転車の接地点を左右に移動させる第二の方法は、身体を左右に傾ける方法である。これは、旋回時にリーニン、リーンアウト（身体と車体がまっすぐな乗り方をリーンウイズという）と呼ばれている方法で、図2に示す。この作用を一輪車を例にとって説明してみよう。

手押しの一輪車は土砂を運ぶのによく使われているが、この一輪車を図3のように傾けると、一輪車はその方向に進路を変えてゆくものである。車輪と鉛直面とのなす角をキャンバ角というのであるが、キャンバ角があると、図3のように走行車輪を傾いた方向に押しやる力が生ずる。この力をキャンバスラストといっている。リーニン、リーンアウトは旋回の一つのテクニックとして、あるいはその人の「くせ」として用いられるのであるが、直進時の安定制御にも用いることができる。例えば、身体を左に倒せば車体はその反動で右に倒れるので、キャンバスラストにより車輪接地点は右に移動してゆき、ハンドル操作と同じように直立安定作用をはかることができる。これが直立安定の第二の方法である。

四輪、三輪自動車の場合には、重心がその四輪三輪の中に入っていれば安定であるが、自転車など二輪車の場合には、前後輪を結ぶ接地線はほとんど一つの線をなしているから、いつも重心がその上にあるというわけにはゆかず、絶えず左右にふらふらしているというのが自転車走行の実情で

ある。

このように見てくると、自転車を直立走行させる方法は、手の平の上で長い棒をうまく直立安定させる曲芸と似ている。自転車の場合は前後方向には倒れないという違いはあるけれども、要するに人為的あるいは自動的なハンドル操作、または姿勢制御によるキャンバスラストの利用によって、接地点を左右に移動させて直立安定を保たせているのである。

2 駆動力、制動力と

コーナリングフォース

および

キャンバスラスト

走行力学に移る前に、陸上を走るすべての車にとって最も重要な力について触れておこう。それは、車輪と路面との間の摩擦力に起因する力のことである。これが前後方向に働く場合、車を加速したり定速走行させたりする駆動力となり、あるいは減速させる制動力となるが、横方向に働く場合にはコーナリングフォースあるいはキャンバスラストとなる。

いずれも車輪と路面との摩擦の大小と関係するもので、これをなるべく大きくするために滑りにくいタイヤ表面にしたり、いろいろの工夫がなされているが、基本的には接地荷重に比例して摩擦力が大きくなる。駆動力、制動力は摩擦力そのものであるから、接地荷重が大きく滑りにくい車輪が望ましい。私など小さいころに、自転車をこぐのがつらくなると、飛行機のような翼をつけていれば楽なのにと考えたことがあるが、これは大変な思い違いで、車体が浮き上がっては駆動力はなくなってしまうのである。スピードを競う自動車レースの車などでは、浮き上がりを極力防止するため下向き揚力の翼をつけて、接地荷重を増しているほどである。通常走行の場合にはタイヤの摩擦係数は0.8程度にもなり、駆動上あるいは制動上、十分なものである。しかし、この駆動あるいは制動の問題は本論の範囲外であるので、これ以上はふれないでおく。本論で重要なのはコーナリングフォースとキャンバスラストである。

直進している自動車のハンドルを右に切ったとき、その瞬間には自動車はそのまま直進しようとしているから、前輪の方向と進行方向とはある角

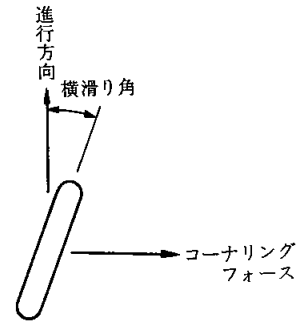


図4 コーナリングフォース

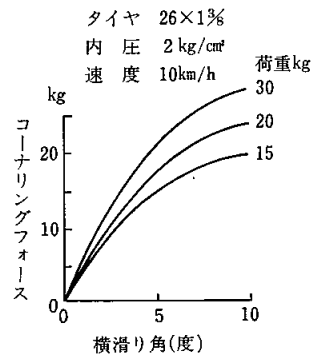


図5 コーナリングフォースの大きさ【文献(2)より】

度をなしていることになる。このように車輪の向きと進行方向とが異なるとき、その角度を横滑り角と称する。この横滑り角のために前輪の接地点には図4のように右方向の力が生じて、車体は右方向に転向してゆくことになる。このときに生じている進行方向に直角の力をコーナリングフォースといい、このコーナリングフォースを横滑り角で割ったものを、コーナリングパワーという。この一例を図示したのが図5【文献(2)より】であり、横滑り角が数度まではそれに比例してコーナリングフォースが増加するが、10°近くなると飽和状態になってくることがわかる。ハンドルを切るといことは、車輪の接地点に横滑り角を生じさせて、コーナリングフォースを起こさせ、方向転換を行うということになる。そして、方向転換によって起こる遠心力とコーナリングフォースがちょうどバランスするわけである。このようなわけでコーナリングフォースは車の操縦の上から非常に重要なものである。

このコーナリングフォースを発揮させるには、タイヤと路面との摩擦係数が十分でなければならず、例えば、油の流れた路面上では、ハンドルを

切ってもコーナリングフォースはきわめて微弱のため、自動車は横滑りするのみで操縦はまったくできず、二輪車は転倒を免れない。そもそも陸上を走行するすべての乗り物には、このコーナリングフォースを大きくするための工夫がなされている。図5のように横滑り角が数度までそれに比例してコーナリングフォースが増加するのは、車の操縦上きわめて好都合であるが、これはゴムタイヤであればこそである。昔の車輪はゴム製でなく、木製あるいは鉄製であり、現在でも鉄道では鉄輪タイヤが用いられている。この鉄輪は横滑り角がきわめて小さい間は、コーナリングパワーはさほど小さくはないが、横滑り角が少し大きくなるとコーナリングフォースが飽和してしまい、横滑りの危険が大きくなり、そのためフランジ付きの車輪となっている。

またホバークラフトと呼ばれる空気クッション原理を利用した乗り物 (ground effect machine) が走行抵抗が少なく、陸上、水上市ずれでも運行できるので一時大いにけん伝され、実際にも使用されているが、これの一つの泣き所は、急速な進路変更がやりにくいことである。船舶についてもいえることであるが、進路を変えるのに必要な横方向力がきわめて少ししか出せないため、機敏な動作がまったくできない。そのため、車輪を用いないのが一つの長所であるホバークラフトでありながら、陸上のものについては車輪を出す方式も案出されたほどである。このようにゴムタイヤと路面との間の摩擦は、駆動力、制動力とコーナリングフォースという形で、陸上のあらゆる乗り物の走行性、操縦性に対し絶大な効果を発揮しているのである。

二輪車、一輪車においては、コーナリングフォースのほかにキャンバラストも重要である。これは図3で説明したように、車輪が傾いているときに生ずるもので、その実測例を文献(2)から引用したのが図6である。しかし、横方向力の大きさは図5と図6の比較からもわかるように、コーナリングフォースよりも相当小さい。したがって、自転車の操縦性からいって最も重要なのがコーナリングフォース、次いでキャンバラストということになる。

なお、以上のことを総合して簡単にまとめると次のようになる。

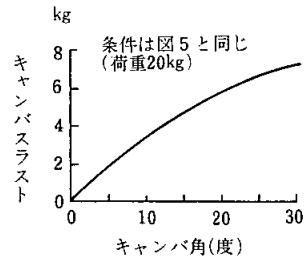


図6 キャンバラストの大きさ [文献(2)より]

自転車の直立安定は、重心の下に接地線をもつてくることにより保たれる。その方法を個条書きにすると次のとおりである。

(1) ハンドル操作により接地線を移動させる方法 (主としてコーナリングフォースの利用)

- 1) 搭乗者によるハンドル操作
 - 2) ハンドルの自然的な回転力
 - a. 前輪荷重による回転力
 - b. ハンドル系の重量による回転力
 - c. ジャイロのプレセッションによる回転力
- 2)は1)に比べて小さいが、2)の中では a. が大きく、 b. は小さい。

(2) 搭乗者の姿勢制御により車体を傾けて接地線を移動させる方法 (キャンバラストの利用)

(2)は(1)に比べて小さいが、手放し走行の場合は(1)の2)と(2)で行われる。

3 直立安定走行の力学

このように、自転車は重心が接地線の上にあるように、常にハンドル操作あるいは姿勢制御を行って直立安定が保たれているのであるが、操縦者はさらに自転車が進路から外れないという位置制御も同時に行っている。自転車を操縦しているときには、この直立安定制御と位置制御をほとんど無意識的に行っているのであるが、いったいハンドル操作角や姿勢の傾き角を何によって決めているのであろうか。人間というものはきわめて複雑なものであって、人間の一般的制御特性はまだ未解決の分野が大きい。自転車の直進走行という簡単な現象についても、その内部に立ち入って考えると、自転車自体の特性のみならず人間の制御特性が問題となり、手に負えなくなる。

そこで本稿では、自転車の直進安定走行についてわかりやすく説明するため、次のような方法をとりとうと思う。すなわち、人間の制御特性につい

てはあまりふれずに、単にハンドル角は車体傾き角に比例すると仮定し、さらに次のような単純化を行い、解析を進めることとする。

仮定

- (1) 車輪の横滑り角は零で、車輪の軌跡は車輪の向きと一致する。すなわち、コーナリングパワーは無限大であり、またキャンバストラストは無視する。
- (2) 人と車は一体であり、常にリーンウイズである。
- (3) トレール=0, キャスタ角=90°, すなわちハンドル軸は垂直で、ハンドル軸線上に前車輪がある。
- (4) ハンドル角が車体傾き角に比例するような制御を行っている。

使用記号 (図1参照)

- X : 全車 (人間と自転車を一体としたもの) の重心を通る前後軸 (前向きに正)
- Y : 全車の重心を通る左右軸 (右向きに正)
- Z : 全車の重心を通る上下軸 (下向きに正)
- α : 車体の傾き角 (バンク角) (右に正) rad
- β : ハンドル角 (右に正) rad
- ϕ : 車体の向き (回頭角) (右に正) rad
- y : 重心の進路からのずれ (右に正) m
- l_1, l_2 : 重心と前後輪接地点との前後距離 m
- l : 前後輪の接地点間距離 m, $l = l_1 + l_2$
- W : 全体重量 kg
- J_x : 重心を通る前後軸Xまわりの全車の慣性モーメント $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$
- J_w : 車輪の車軸まわりの慣性モーメント $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$
- J_{xz} : 全車のX, Y軸に関する慣性乗積^{注)} $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$

- h : 全車の重心高さ m
- r : 車輪半径 m
- v : 車速 m/s
- g : 重力加速度 m/s^2

いま、図7のように、

時刻 t のとき 前輪 A, 後輪 B

時刻 t + Δt のとき 前輪 A', 後輪 B'

とすると、車体の回転中心 O は前後輪にそれぞれ

注) $J_{xz} = \int XZ \cdot dm$ 慣性乗積は、後の荷台に背の高い荷物を載せたときには無視できなくなるが、一般にはほとんど無視できる。

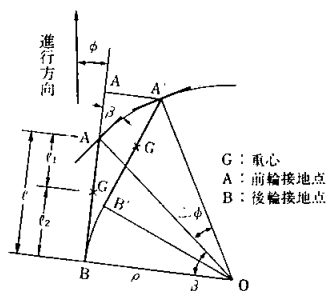


図7 Δt 秒間における車体の変位

直角方向にあり、

$$\rho \beta = l \quad (\rho : \text{回転半径})$$

であるから、

$$\rho = \frac{l}{\beta} \dots \dots \dots (1)$$

また、 $AA' \doteq v \Delta t$ および $AA' \doteq \rho \Delta \phi$ であるから

$$\frac{\Delta \phi}{\Delta t} \doteq \frac{v}{l} \dots \dots \dots (2)$$

したがって、式(1), (2)から、

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{v}{l} \beta \dots \dots \dots (3)$$

車体傾き角 $\alpha = 0$ のときの重心点の横方向変位速度を \dot{y}_0 (以後、 $\frac{dy}{dt} = \dot{y}$ と記す) とすると、

図7において、

$$A'A'' \doteq AA' \cdot \beta \doteq v \beta \cdot \Delta t$$

したがって、重心点の横方向速度は、

$$\dot{y}_0 = v \phi + v \frac{l_2}{l} \beta$$

車体傾き角 α があるときは、

$$\dot{y} = v \phi + v \frac{l_2}{l} \beta + h \dot{\alpha} \dots \dots \dots (4)$$

車体が図8のように傾いているときに、接地点に生じている水平方向の力を F とすると、

$$\frac{W}{g} \ddot{y} = F$$

重心 G を通る前後軸 X まわりの運動方程式は、

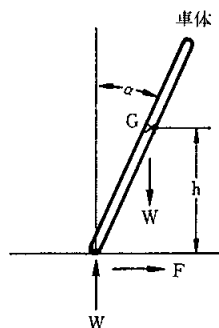


図8 車体傾き時の外力

$$J_x \ddot{\alpha} = -Fh + Wh\alpha + J_{xz} \ddot{\phi} - J_w \frac{v}{r} (2\dot{\phi} + \dot{\beta})$$

右辺の第4項は、ジャイロ作用により車体を立ち直らせようとするトルクである。前式と合わせてFを消去すると、

$$J_x \ddot{\alpha} = -\frac{W}{g} h \ddot{y} + Wh\alpha + J_{xz} \ddot{\phi} - J_w \frac{v}{r} (2\dot{\phi} + \dot{\beta}) \quad \dots\dots\dots(5)$$

直立安定のために車体の傾いた方向にハンドルを切るときに次の関係、すなわち、

$$\beta = K \alpha \quad \dots\dots\dots(6)$$

の関係があると仮定する。式(3), (4), (5), (6)の4式が基礎方程式であって、未知数も4個であるから初期条件が与えられれば解ける。さて、便宜上 β , ϕ , y を消去することとし、まず、式(5)に式(4)を代入して y を消去する。

$$J_x \ddot{\alpha} = Wh\alpha - \frac{W}{g} h (v\dot{\phi} + v \frac{\ell_2}{\ell} \dot{\beta} + h\ddot{\alpha}) + J_{xz} \ddot{\phi} - J_w \frac{v}{r} (2\dot{\phi} + \dot{\beta}) \quad \dots\dots\dots(7)$$

式(3), (6)より、

$$\dot{\phi} = \frac{v}{\ell} K \alpha$$

これと式(6)を式(7)に代入して β , ϕ を消去して整理すると、

$$(J_x + \frac{W}{g} h^2) \ddot{\alpha} + K v (\frac{W}{g} h \frac{\ell_2}{\ell} - J_{xz} \frac{1}{\ell} + J_w \frac{1}{r}) \dot{\alpha} + \{K \frac{v^2}{\ell} (\frac{W}{g} h + 2 \frac{J_w}{r}) - Wh\} \alpha = 0 \quad \dots\dots(8)$$

いま、 $\alpha = \alpha_0 e^{\lambda t}$

とおき、式(8)に代入すると特性方程式は、

$$(J_x + \frac{W}{g} h^2) \lambda^2 + K v (\frac{W}{g} h \frac{\ell_2}{\ell} + \frac{J_w}{r} - \frac{J_{xz}}{\ell}) \lambda + K \frac{v^2}{\ell} (\frac{W}{g} h + \frac{2J_w}{r}) - Wh = 0 \quad \dots\dots\dots(9)$$

となる。このような二輪車が安定に走行できる条件は各係数が正であることである。すなわち、

$$\frac{W}{g} h \frac{\ell_2}{\ell} + \frac{J_w}{r} - \frac{J_{xz}}{\ell} > 0 \quad \dots\dots\dots(10)$$

および

$$K \frac{v^2}{\ell} (\frac{W}{g} h + \frac{2J_w}{r}) - Wh > 0 \quad \dots\dots\dots(11)$$

であればよい。一般的に慣性乗積 J_{xz} は無視できるから、式(10)は除外できて、式(11)が安定条件といえることができる。ここから $K > 0$ が絶対条件であることがわかる。車体が右に傾いたらハンドルは

右に切らねばならぬことが理論的にもいえるわけである。

なお、式(11)においては、左辺の $Kv^2Wh/(g\ell)$ は回頭による遠心力、 $2Kv^2J_w/(\ell r)$ は回頭によるジャイロモーメント、 Wh は重心高さによる倒れ傾向を示している。前二者が後の第三者を上回れば安定ということになる。一般に直立安定性に効果があるとするジャイロ作用は、車輪の倒れによる直接的なジャイロ効果を指していると思われるが、前述のハンドル軸系のプレセッションとは異なり、安定性に寄与するジャイロ作用は車体の回頭によるものであることに注意されたい。

式(11)に数値例を当てはめてみよう。数値は26インチの実用車に例をとった。各数値は次のとおりとする。

- W = 86.1 kg
- $\ell_1 = 0.596$ m
- $\ell_2 = 0.514$ m
- $\ell = 1.10$ m
- $J_x = 0.454 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
- $J_w = 0.0218 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
- $J_{xz} = 0$
- h = 0.84 m
- r = 0.325 m
- v = 2.78 m/s (時速10km/h)

これを式(10)に代入すると左辺は、

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= K \times \frac{2.78^2}{1.1} (\frac{86.1}{9.8} \times 0.84 + \frac{2 \times 0.0218}{0.325}) \\ &= 86.1 \times 0.84 = K \times 7.0 (7.37 + 0.13) \\ &= 72.3 = 52.5K - 72.3 \quad \dots\dots\dots(12) \end{aligned}$$

したがって、 $K > \frac{72.3}{52.5} = 1.4$ であれば直立安定

が可能である。また、もし車速が 15km/h ($v = 4.17$ m/s) のときは $K > 0.62$ となり、ハンドル角は小さくてよいことになる。このように車速が大きくなるとハンドル操作角は小さくてすむことがわかる。なお、上記の $v = 2.78$ m/s のときの計算過程 [式(12)] でわかるように、車輪のジャイロ効果は車体の遠心力効果に比べて、 $0.13 \div 7.37 \approx 2\%$ でありきわめて小さい。この数値は実用車の26インチ車輪の場合であるから、ミニサイクルやスポーツタイプではさらに小さく、一般的にはジャイロ効果は無視できるものである。結局、直立安定のためには v , K が大きく、 ℓ が小さい方が

よいということになる。

以上の説明は、自転車が直立安定を保つにはどのような条件を必要とするかを示したものであるが、それでは自転車の運動はどうなっているのか検討してみよう。式(9)の導入において $\alpha = \alpha_0 e^{\lambda t}$ とおいている。これは式(8)の一般解であるので、式(9)から λ を求めてみよう。式(9)は λ の二次方程式であるから根は二つある。式(9)を次のように書き改めておく。

$$a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0 \dots\dots\dots(9')$$

解は、

$$\lambda = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4 a_2 a_0}}{2 a_2} \dots\dots\dots(13)$$

これに前述の数値と $v = 2.78 \text{m/s}$ を当てはめてみると、

$$a_2 = J_x + \frac{W}{g} h^2 = 0.45 + 6.23 = 6.68$$

$$a_1 = K v \left(\frac{W}{g} h \frac{\ell_2}{\ell} + \frac{J_w}{r} \right) \\ = K \times 2.78 (3.42 + 0.07) = 9.7K$$

$$a_0 = K \frac{v^2}{\ell} \left(\frac{W}{g} h + \frac{2 J_w}{r} \right) - W h = 52.5K - 72.3$$

いま、 $K = 1.0$ のときは、

$$a_1 = 9.7 \quad a_0 = -19.8$$

となり、解は、

$$\lambda_1 = 1.04 \quad \lambda_2 = 2.56$$

となる。したがって式(8)の解は、

$$\alpha = \alpha_{01} e^{1.04t} + \alpha_{02} e^{2.56t} \dots\dots\dots(14)$$

となるから、時間とともに車体傾き角が増大して倒れてしまうことになる。これは安定条件のところで、 $v = 2.78 \text{m/s}$ のときは $K > 1.4$ を満足しなければ不安定となることの具体的説明である。

$K = 2.0$ のときは

$$a_1 = 19.4 \quad a_0 = 33$$

となり、解は、

$$\lambda_1 = -1.45 + 1.64i \quad (i: \text{虚数})$$

$$\lambda_2 = -1.45 - 1.64i$$

となる。したがって式(8)の解は、

$$\alpha = \alpha_{01} e^{(-1.45 + 1.64i)t} + \alpha_{02} e^{(-1.45 - 1.64i)t} \\ = e^{-1.45t} (\alpha'_{01} \cos 1.64t + \alpha'_{02} \sin 1.64t) \dots\dots(15)$$

となる。式(15)の括弧の内は振動を示し、 $e^{-1.45t}$ は時間とともに小さくなる数であるから、式(15)は時間とともに振動が減衰してゆくことになる。何か外乱によって車体が傾いてもすぐ揺動しながら立ち直ってゆくことがわかり、安定条件 $K > 1.4$ を

満足しているから安定ということと一致した結論になる。式(15)の三角関数の中の1.64はこの揺動の角振動数であり、これを 2π で割ったものが振動数である。この場合は振動数は、

$$1.64 \div 2\pi = 0.26 \text{Hz}$$

となる。

ハンドル操作をするのは人間であるから、この車体の揺動の振動数があまり高いと操縦しにくくなる。式(9)'の a_2 は全車の接地点まわりの慣性モーメントであるが、 a_2 が大きいと式(13)から λ が小さくなり、振動数が低くなるので直立安定がやりやすくなるといえよう。つまり、全車の接地点まわりの慣性モーメントは安定判別には無関係であるが、慣性モーメントが大きいと人間にとってハンドル制御がやりやすくなる。一般に重心高さが高い自転車は人間を含めた全車の慣性モーメントが大きくなるから、重心が高い自転車は乗りやすいといえる。

これまでの解析は、式(6)で示されているように車体の傾き角に合わせてハンドルを操作したら、直立安定性が保たれるかどうかということであった。いま人間による制御は考えずに、ハンドルを正弦波状に動かしたら車体の傾き角はどのように揺動するであろうか。これを求めてみるためには式(6)を外して、式(3)~(5)からハンドル角 β と車体傾き角 α の関係を導き出せばよい。

$J_{xz} = 0$ とすると次式のようになる。

$$\left(J_x + \frac{W}{g} h^2 \right) \ddot{\alpha} - W h \alpha = -v \left(\frac{W}{g} h \frac{\ell_2}{\ell} + \frac{J_w}{r} \right) \dot{\beta} \\ - \frac{v^2}{\ell} \left(\frac{W}{g} h + 2 \frac{J_w}{r} \right) \beta \dots\dots\dots(16)$$

各係数を b_1, \dots, b_4 とすると、式(16)は、

$$b_1 \ddot{\alpha} - b_2 \alpha = -b_3 \dot{\beta} - b_4 \beta \dots\dots\dots(16')$$

いま、ハンドル角 β が、

$$\beta = \beta_0 \sin pt$$

で揺動すると仮定すると式(16)'は、

$$b_1 \ddot{\alpha} - b_2 \alpha = -b_3 \beta_0 \cos pt - b_4 \beta_0 \sin pt$$

いま、 $\alpha = \alpha_0 \sin(pt - \zeta)$ (ζ は α と β の位相差) の車体傾き角の揺動が起こされるとして式を整理すると、

$$\alpha_0 (b_1 p^2 + b_2) (\cos \zeta \sin pt - \sin \zeta \cos pt) \\ = \beta_0 (b_3 p \cos pt + b_4 \sin pt)$$

恒等式であるから $\cos pt$ と $\sin pt$ の係数をそれぞれ等しいとおいて、

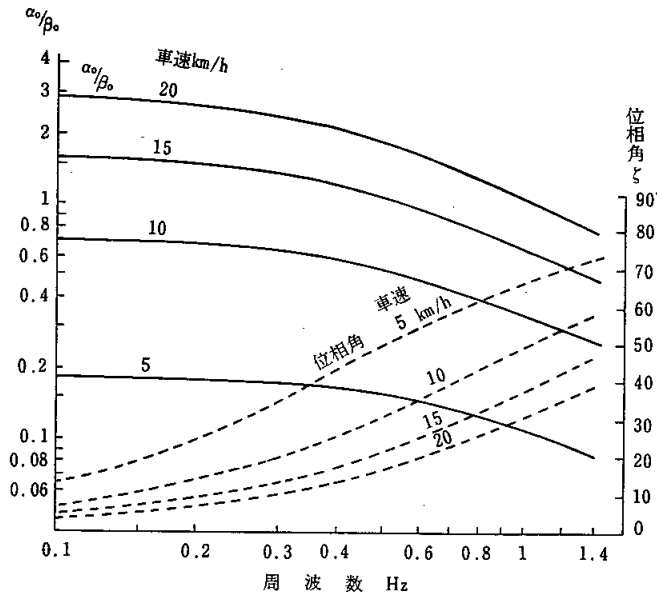


図9 ハンドル角 α_0 ～車体傾き角 β_0 の周波数応答関数

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0(b_1p^2 + b_2)\cos\zeta &= \beta_0 b_4 \\ -\alpha_0(b_1p^2 + b_2)\sin\zeta &= \beta_0 b_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

したがって、ハンドル角の振幅 β_0 とそれによって起こる車体傾き角の揺動振幅 α_0 の関係は、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\alpha_0}{\beta_0} &= \frac{b_4}{(b_1p^2 + b_2)\cos\zeta} \\ &= \frac{b_4}{b_1p^2 + b_2} \sqrt{1 + \left(\frac{b_3}{b_4}\right)^2 p^2} \\ \tan\zeta &= -\frac{b_3}{b_4} p \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

前例の数値を代入すると、

$$b_1 = J_x + \frac{W}{g} h^2 = 0.45 + 6.23 = 6.68 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$b_2 = Wh = 72.3 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$b_3 = v \left(\frac{W}{g} h \frac{\ell_2}{\ell} + \frac{J_w}{r} \right) = 3.49v \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$$

$$b_4 = \frac{v^2}{\ell} \left(\frac{W}{g} h + 2 \frac{J_w}{r} \right) = 6.79v^2 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

したがって式(18)から、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\alpha_0}{\beta_0} &= \frac{1.016v^2}{p^2 + 10.82} \sqrt{1 + \frac{0.264}{v} p^2} \\ &= \frac{0.0258v^2}{f^2 + 0.274} \sqrt{1 + \frac{10.41}{v} f^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

ただし、振動数 $f = p \div (2\pi)$

$$\tan\zeta = -\frac{0.514}{v} p = -\frac{3.23}{v} f$$

α_0/β_0 は車体傾き角がハンドル角の何倍となるかを示し、 ζ は車体傾き角がハンドル角よりどのくらい位相が遅れるかを示す。図9は、車速5、10、15、20km/h (秒速になおすと、それぞれ $v =$

1.39, 2.78, 4.17, 5.56m/s) の各条件ごとに $f=0.1 \sim 1.4\text{Hz}$ のハンドル角揺動振動数に対する α_0/β_0 と位相角 ζ を示したものである。このような曲線を周波数応答関数と呼んでいるが、この場合には入力ハンドル角 β_0 で、出力が車体傾き角 α_0 である。図9の実線が α_0 と β_0 の比であって、車速が大きくなると車体傾き角の揺動が大きくなること、ハンドル角の揺動振動数が高くなると車体傾き角の振幅は小さくなること、振動数が高くなると大きくなる。極端な場合には位相差は 90° に達し、揺動しているハンドル角がちょうど中央にきているときに、車体傾き角は最大傾斜になっているという具合になる。

これで自転車の直立安定走行の力学の解説を終えるが、キャスト角、トレール、キャンバストラ、横滑り角などを考慮した自転車の運動力学については、近藤政市先生の論文〔参考文献(3)]を参照されたい。

参考文献

- (1) 自転車工学の基礎：技術資料53-1 (昭和53年度第1回技術研修会テキスト)、自転車産業振興協会技術研究所、33ページ
- (2) 塚田ほか：二輪車の基礎的研究 (第1報・軽二輪車タイヤの特性)、日本機械学会講演論文集、No.190 (1968-4)
- (3) 近藤政市：二輪車の力学、自転車技術研究所、1962-8